

第一宇宙速度計算ワークシート

(高校物理レベル)

●思考実験「メジャーリーグ投手の遠投で地球を一周できるか？」

(思考実験) メジャーリーグの投手が、地球を一周する遠投を試みたら？

■はじめに

この問いは、現実にはあり得ないように思える。しかし、物理学において「あり得ないことを考える」ことは、非常に重要な思考の訓練になる。空想の中にこそ、法則の本質が潜んでいる。今回はこの問いを出発点に、力学、重力、そして宇宙速度の概念を探っていく。

■初期条件の設定

まず、投球の条件を整理しよう。投手から、ボールは以下の条件で投げられると仮定します。

リリース位置 : 地面から高さ 2.5m。
投球速度 : 時速 150km。
投球方向 : 完全な水平投げを想定。
空気抵抗 : 今回は、無視。(理想的な状況とする。)

この条件下では、ボールはおおよそ 30メートル先 に落下します。

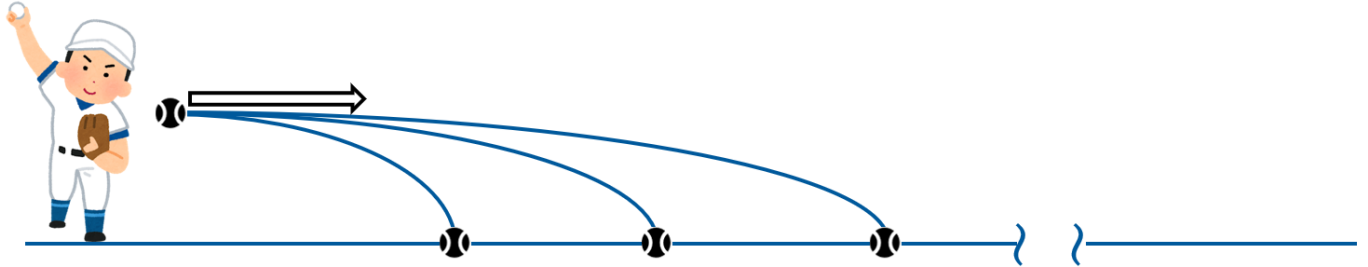
これは、重力加速度(約 9.8m/s^2)によってボールが下向きに引かれるためです。

■ここで使用する法則・公式・考え方など:

- ・万有引力の法則や円運動の方程式は高校物理の単元です。
- ・位置エネルギーや運動エネルギーは中学校で習いますが、その後高校物理で詳細に習う内容です。

■落下距離と速度の関係

ボールの水平速度が速くなればなるほど、落下までの時間は同じでも、水平に進む距離は長くなります。つまり、速度が上がれば上がるほど、ボールは遠くまで飛ぶことになります。



ここで重要なのは、地球が平面ではなく球体であるという事実だ。地球の表面は曲がっている。したがって、ある速度以上になると、ボールは地球の曲率に沿って落下し続け、地面にぶつからずに飛び続ける可能性が出てくる。

■地球を一周するための条件(第一宇宙速度)

この「地面に落ちずに飛び続ける」状態は、実は人工衛星が地球を周回する原理と同じである。これを実現するために必要な速度が「第一宇宙速度」と呼ばれるのだ。すなわち、「第一宇宙速度」とは地球の重力によって引かれながらも、地表に落ちることなく、地球を円軌道で周回するために必要な速度のことです。

それでは、高校物理までに習うことを使って、「第一宇宙速度」を導出してみましょう。

使うのは「万有引力の方程式」や「円運動の方程式」です。

【万有引力の方程式】

・万有引力の方程式は以下の通りである。また、地球の質量・半径などは以下の通り。

$$F = \frac{GMm}{R^2}$$

・ G ：万有引力定数	$6.674 \times 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2]$
・ M ：地球の質量	$5.97 \times 10^{24} [\text{kg}]$
・ m ：ボールの質量	任意の重さ
・ R ：地球の半径	$6.37 \times 10^6 [\text{m}]$

■ここで使用する法則・公式・考え方など：

- ・万有引力の法則や円運動の方程式は高校物理の単元です。
- ・位置エネルギーや運動エネルギーは中学校で習いますが、その後高校物理で詳細に習う内容です。

【円運動に必要な向心力】

・また、物体が地球の周囲を円軌道で運動するためには、向心力が必要です。

円運動の方程式(向心力)は以下の通り。

ここで、物体の速度を v と置きます。

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

円軌道を維持するためには、万有引力が向心力と等しくなければなりません。

そのため、これまでの式が等式で結ばれます。

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

両辺を両辺から m を約分し、速度 v を求めると・・・

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

これが「第一宇宙速度」です。

したがって、「第一宇宙速度」を決定するパラメータは「万有引力定数: G 」と「地球の質量: M 」と「地球の半径: R 」で構成されています。ここにそれぞれのパラメータを代入すると、秒速 7.9km が導出されます。

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{6.37 \times 10^6}} \\ &= \sqrt{62511616.95} \\ v &\doteq 7906.43 \text{ [m/s]} = 7.9 \text{ [km/s]} \end{aligned}$$

「もしもメジャーリーグの投手が……」という問いは、物理の教科書に載っている数式を、私たちの世界に引き寄せてくれます。

■ここで使用する法則・公式・考え方など:

- ・万有引力の法則や円運動の方程式は高校物理の単元です。
- ・位置エネルギーや運動エネルギーは中学校で習いますが、その後高校物理で詳細に習う内容です。

■実際には地球には大気(空気抵抗)もある

・これまでの議論では空気抵抗を考慮していませんでしたが、現実には地表付近で秒速 7.9km という極めて高速で物体を飛行させると、空力加熱(断熱圧縮や摩擦など)によりボールの表面温度は数千度に達し、瞬時に燃え尽きてしまうでしょう。

これは、隕石が大気圏に突入する際に発光する現象(流星)と同じです。なぜこれほどの熱が発生するかというと、

- ー空気は密度が高く、分子がたくさん詰まっている
- ー高速で移動する物体は、空気分子を激しく圧縮・加熱する(断熱圧縮や摩擦)
- ーその結果、物体表面に数千度の高温が生じる

このため、地表付近で秒速 7.9km で物体を飛ばすのは現実的ではなく、空気のない宇宙空間で飛ばす必要があるというわけです。

■ロケットがまず高度を稼ぐ理由

・ロケットは、搭載する衛星を地球周回させるために最終的には水平方向に秒速 7.9km の速度を稼ぎに行く必要がありますが、いきなりその速度を地表近くで出すと、上記のようにロケット本体が燃え尽きてしまいます。

そこでロケットは、以下のような段階的な飛ばし方をとります。

ロケットの飛び方(非常に単純化したモデル)

STEP1:まずは、垂直に上昇して、高度を稼ぐ

→ 空気が薄くなる高高度(例:100km 以上)まで上がる

STEP2:空気抵抗が小さくなったところで、徐々に水平方向に加速する

→ 最終的に軌道速度(7.9km/s)に到達

このようにして、空気抵抗による加熱を最小限に抑えつつ、軌道投入を目指します。

■ここで使用する法則・公式・考え方など:

・万有引力の法則や円運動の方程式は高校物理の単元です。

・位置エネルギーや運動エネルギーは中学校で習いますが、その後高校物理で詳細に習う内容です。

■ それでは、どれほどのエネルギーが必要になるだろうか

・ 上記のように単純化した飛ばし方を取った場合、ロケットはどれほどのエネルギーを必要とするだろうか。仮にロケットを100[kg]の小型ロケットとし、燃料消費はないものとしましょう。

・ 質量 100[kg]の物体を、高度100[km]に持ち上げる位置エネルギーと、水平方向に秒速 7.9km まで加速するエネルギーを計算します。位置エネルギーと運動エネルギーを単純なモデルで可視化してみましょう。

STEP1:高度100kmまで垂直に上昇

・位置エネルギー(P_E)

$$P_E = m \cdot g \cdot h = 100 \times 9.8 \times 100,000 = 98,000,000 \text{ [J]}$$

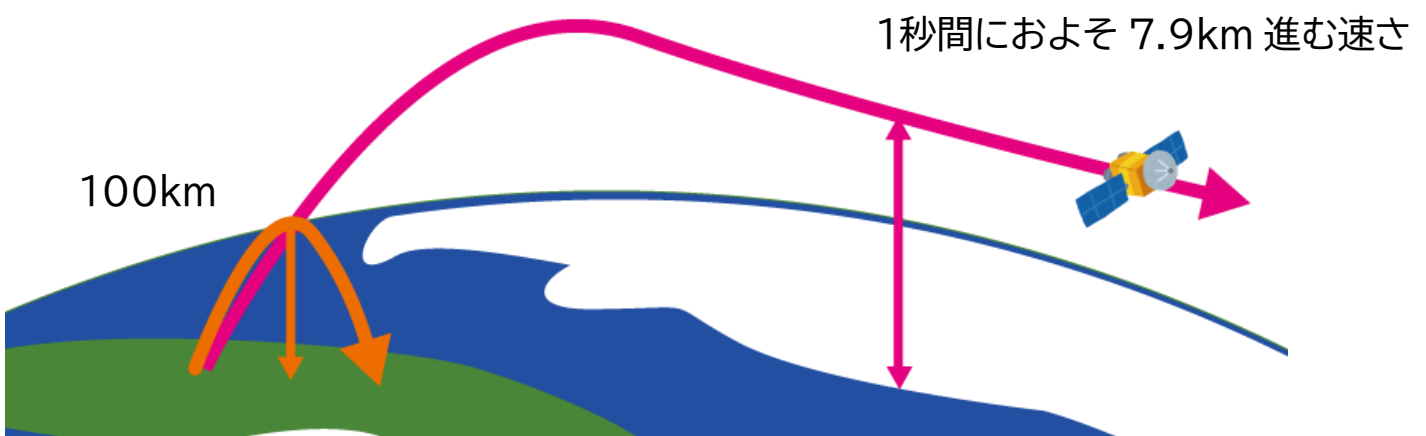
STEP2:水平方向に秒速7.9kmまで加速

・運動エネルギー(K_E)

$$K_E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times (7900)^2 = 3,120,500,000 \text{ [J]}$$

上記から分かる通り、実は、高く上に上がるよりも、第一宇宙速度を得るために必要なエネルギーの方が大きいことがわかりますね。

・ロケットは速度を獲得するためのシステム



■ ここで使用する法則・公式・考え方など:

・ 万有引力の法則や円運動の方程式は高校物理の単元です。

・ 位置エネルギーや運動エネルギーは中学校で習いますが、その後高校物理で詳細に習う内容です。

■まとめ

・ロケットが地球を離れるには、まず高度を稼がねばならない。空気の壁を越え、摩擦の炎を避けるために、大気の無い100km以上の高みへと高く上昇する。だが、そこに必要なエネルギーは、意外にもさほど大きくはない。重力に抗うための位置エネルギーは、全体のほんの一部に過ぎない。

・それよりも本当に大切なのは、速度なのだ。地球を一周するには秒速7.9kmという途方もない速さが必要であり、それを得るための運動エネルギーは、位置エネルギーの数十倍にもなる。たとえば、ロケットが燃料を使い切って加速する場合、必要なエネルギーの大半は、速度を得るために費やされる。空高く舞い上がることも、速く飛ぶことの方が、はるかに困難なのだ。

ロケットの飛翔は、重力との戦いであると同時に、速度獲得との戦いでもある。そのミッションを遂行するためには、ただ高くではなく、速く飛ぶ力が必要なのだ。

■ここで使用する法則・公式・考え方など：

- ・万有引力の法則や円運動の方程式は高校物理の単元です。
- ・位置エネルギーや運動エネルギーは中学校で習いますが、その後高校物理で詳細に習う内容です。